

Построение сильно циклических векторов усеченной дифференциальной системы

Абдрахманов Артур Фаритович
Бордаченкова Елена Анатольевна
Панфёров Антон Александрович

ВМК МГУ

09.10.2026

Используемые обозначения

K — числовое поле характеристики 0.

$K[x]$ — кольцо многочленов переменной x .

$K[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов переменной x .

Пусть a — формальный степенной ряд:

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, a_i \in K.$$

Проблема: представление бесконечных рядов в памяти компьютера.

Два подхода (С. А. Абрамов, А. А. Рябенко, Д. Е. Хмельнов):

- алгоритмический: $k \rightarrow a_k$
- **усечения**

Усечения формальных степенных рядов

Определение. Усечение ряда a — многочлен $a^{(d)} = \sum_{i=0}^d a_i x^i$,
число d — степень усечения.

Определение. Продолжение усечения $a^{(d)}$ — такой ряд $\tilde{a} \in K[[x]]$,
что $\tilde{a}^{(d)} = a^{(d)}$.

Пример.

$$\begin{aligned} a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} ix^i &\rightarrow a^{(2)}(x) = x + 2x^2 &\rightarrow \tilde{a}(x) = x + 2x^2 + 3x^3 \\ &&\searrow \\ &&\tilde{\tilde{a}}(x) = x + 2x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

Рассматриваем нормальные дифференциальные системы:

$$y' = Ay,$$

где $A = (a_{ij}) \in K[[x]]^{m \times m}$, $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ — вектор неизвестных.

Усеченная система:

$$y' = A^{(d)} y,$$

где $A^{(d)} = (a_{ij}^{(d_{ij})}) \in K[x]^{m \times m}$.

Степенью усечения матрицы называется $d = \min d_{ij}$.

Продолжение системы — система, коэффициенты которой являются продолжениями исходной усеченной системы.

Для системы $y' = Ay$ рассмотрим оператор Δ_A : $\Delta_A v = v' + A^T v$.

Определение. Вектор является **циклическим** для системы $y' = Ay$, если векторы $v, \Delta_A v, \dots, \Delta_A^{m-1} v$ линейно независимы.

Определение. Матрица производных вектора v в силу системы $y' = Ay$:

$$[\Delta_A v] = [v | \Delta_A v | \dots | \Delta_A^{m-1} v]$$

Предложение.

Вектор v является циклическим для системы $\iff \det[\Delta_A v] \neq 0$.

R. C. Churchill and J. Kovacic «Cyclic vectors»

С. А. Абрамов и др. «Resolving sequences of operators for linear ordinary differential and difference systems of arbitrary order»

Пример циклического вектора

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1+x & 1-x \\ x & 1 & x \end{bmatrix} y.$$

Вектор $v = (1, 0, 0)^T$ является циклическим для данной системы:

$$[\Delta_A v] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x^2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & x & x^2 + 2x \end{bmatrix},$$

$$\det[\Delta_A v] = -x^2 \neq 0.$$

Сильно циклический вектор

Определение. Вектор v называется **сильно циклическим** для усеченной системы $y' = A^{(d)}y$, если он циклический для любого её продолжения.

А.А. Панфёров, Е.А. Бордаченкова «Сильно циклические векторы»

Пример.

Вектор $v = (1, 0, 0)^T$ не является сильно циклическим:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1+x & 1-x \\ x & 1 & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1+x & 1-x+x^2 \\ x & 1 & x \end{bmatrix}$$

$$[\Delta_A v] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x^2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & x & 2x \end{bmatrix}, \quad \det[\Delta_A v] = 0.$$

Вектор $w = (0, 0, 1)^T$ является сильно циклическим для данной системы.

Построение сильно циклического вектора

Кандидаты: векторы $v = (v_1, \dots, v_m)^T \in K^m$.

Символьным продолжением матрицы $A^{(d)}$ до степени p будем называть такую полиномиальную матрицу $A^{[p]}$, что

$$A^{[p]} = A^{(d)} + U,$$

где $U = (u_{ij}) \in K[x]^{m \times m}$, $u_{ij} = \sum_{k=d_{ij}+1}^p \alpha_{ijk} x^k$ и α_{ijk} — символьные коэффициенты.

Пример.

Символьное продолжение матрицы $A^{(0)}$ до степени 2 — матрица $A^{[2]}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1+x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 + \alpha_{111}x + \alpha_{112}x^2 & -1 + \alpha_{121}x + \alpha_{122}x^2 \\ 1 + \alpha_{211}x + \alpha_{212}x^2 & 1 + x + \alpha_{222}x^2 \end{bmatrix}$$

$$\det[\Delta_{A^{[2]}} v] = -\alpha_{112}x^2 v_1 v_2 + \alpha_{122}x^2 v_1^2 - \alpha_{212}x^2 v_2^2 + \alpha_{222}x^2 v_1 v_2 - \\ -\alpha_{111}x v_1 v_2 + \alpha_{121}x v_1^2 - \alpha_{211}x v_2^2 + x v_1 v_2 - v_1^2 - v_2^2 \in K[x, \alpha_{ijk}, v_i]$$

$$\det[\Delta_{A^{[2]}} v] = (-\alpha_{112}v_1 v_2 + \alpha_{122}v_1^2 - \alpha_{212}v_2^2 + \alpha_{222}v_1 v_2)x^2 + \\ + (-\alpha_{111}v_1 v_2 + \alpha_{121}v_1^2 - \alpha_{211}v_2^2 + v_1 v_2)x - v_1^2 - v_2^2 \in K[\alpha_{ijk}, v_i][x]$$

Обозначим $D = \det[\Delta_{A^{[p]}} v]$.

Обозначим $[x^r]a$ коэффициент в ряду a при x^r : $[x^r]a = a_r$.

Лемма 1. Максимальная степень x в D , в коэффициент при которой входят v_i без символьных коэффициентов α_{ijk} , не превосходит $\deg_x(\det[\Delta_{A^{(d)}} v]) \leq \max d_{ij} m(m-1)/2$.

Лемма 2. Для целого $r > d = \min d_{ij}$ в коэффициент $[x^r]D$ могут входить символьные коэффициенты α_{ijk} , $1 \leq i, j \leq m$, $d+1 \leq k \leq r+m-2$.

Данные леммы позволяют ограничить степень символьного продолжения, которое мы строим.

Алгоритм построения сильно циклического вектора

Вход: квадратная матрица A усеченной системы.

Результат:

- в случае успеха — множество определяющих многочленов для коэффициентов сильно цикл. вектора и вспомогательной переменной β ;
- в случае неуспеха — $\emptyset$.

Инициализация:

- $\bar{d} := \max d_{ij}, N := \bar{d}m(m-1)/2$;
- построить символьное продолжение $B := A^{[N+m-2]}$;
- вычислить определитель $D := \det[\Delta_B v]$, где $v = (v_1, \dots, v_m)^T$, v_i — символьные коэффициенты;

Алгоритм: основной цикл

- для каждого целого n от 0 до N последовательно рассматриваем $[x^n]D$:
 - коэффициент $[x^n]D$ является многочленом от символьных коэффициентов α_* и v_i ($1 \leq i \leq m$), представим его в виде суммы двух многочленов:

$$[x^n]D = Z(\alpha_*, v_i) + Y(v_i),$$

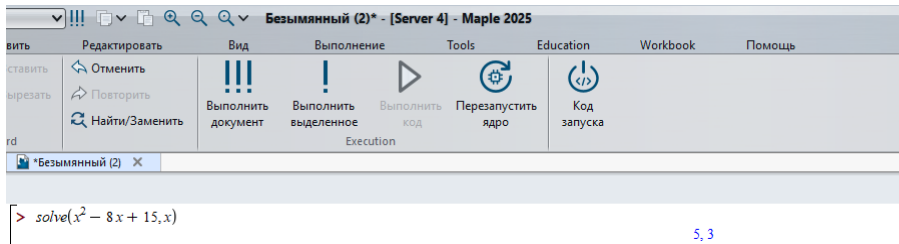
где в $Z(\alpha_*, v_i)$ собраны все мономы $[x^n]D$, содержащие символьные коэффициенты α_* , а в $Y(v_i)$ — мономы $[x^n]D$, в которые α_* не входят;

- рассматривая $Z(\alpha_*, v_i)$ как многочлен от α_* , построить множество M_Z его коэффициентов, которые будут являться многочленами от $v_1, \dots, v_m$;
- вычислить G — базис Грёбнера идеала $\langle M_Z \cup \{Y(v_i) - \beta\} \rangle$, где β — новая символьная переменная;
- если $G \neq \langle 1 \rangle$ и не содержит элемент, являющийся мономом от единственной переменной β , то вернуть G ;
- вернуть $\emptyset$.

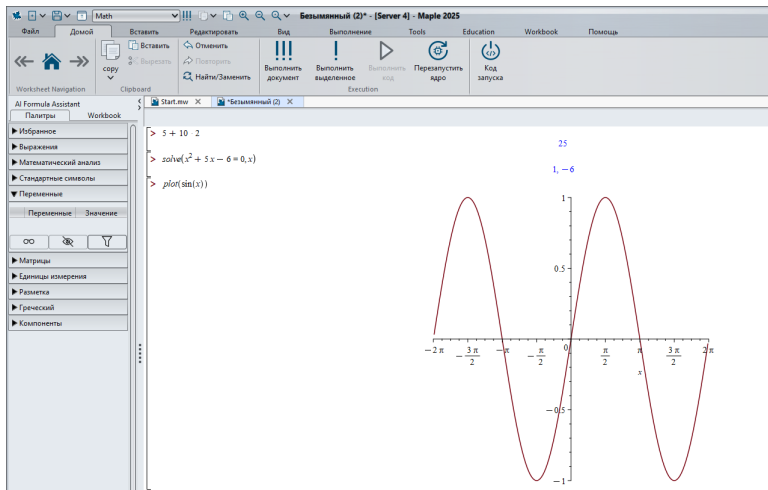
Система Maple

Maple — система компьютерной алгебры, созданная в 1982 году компанией Waterloo Maple.

- Широко используется, активно разрабатывается.
- Существует для ОС Windows, Linux, MacOS. Распространяется платно.
- Функционал включает в себя вычисление и преобразование выражений, решение уравнений, работу с матрицами.
- Имеется свой язык для написания пользовательских процедур и пакетов.
- Богатый набор пакетов.



Пример сессии в Maple



Пример процедуры в Maple

```
4  # returns a matrix DV[n x m] = [v | Dv | D2v | ... | D(m-1)v], m = n by default
5  CV_dv := proc(A, v, m)
6      local n, i, j, k, W, AT, width;
7
8      n := LinearAlgebra[RowDimension](A);
9      if _npassed > 2 then
10         width := m
11     else
12         width := n
13     end if;
14
15     AT := LinearAlgebra[Transpose](A);
16     W := Matrix(n, width);
17     for i from 1 to n do
18         W[i, 1] := v[i]
19     end do;
20
21     for j from 2 to width do
22         for i from 1 to n do
23             W[i, j] := simplify(diff(W[i, j - 1], x) + add(AT[i, k] * W[k, j - 1], k = 1 .. n))
24         end do
25     end do;
26
27     return(W);
28 end proc;
```

Реализация алгоритма в Maple

Алгоритм реализован в виде пакета `FindStrongCyclic` для системы Maple.

Основные процедуры:

- `find_strong_cyclic(A)` $\rightarrow$ множество многочленов, определяющих компоненты сильно циклического вектора;
- `CV_dv(A, v)` $\rightarrow$ матрица производных вектора v в силу системы $y' = Ay$;
- `prolong(p, d)` $\rightarrow$ символьное продолжение многочлена p до указанной степени d .

Используются следующие пакеты:

- `Groebner` — построение базисов Грёбнера;
- `LinearAlgebra` — работа с матрицами.

Пакет `FindStrongCyclic` доступен по адресу:

<https://github.com/KingAArtur/FindStrongCyclic>

```
> A := Matrix([[1, -1, x], [1, 1 + x, 1 - x], [x, 1, x]])
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1+x & 1-x \\ x & 1 & x \end{bmatrix}$$

```
> G := find_strong_cyclic(A)
```

$$\begin{aligned} & [\beta v_2, \beta v_1, v_1 v_2 v_3 + v_2^3 - v_2^2 v_3 - v_2 v_3^2, v_1^2 v_2 + v_1 v_2^2 + 3v_2^3 - 3v_2^2 v_3 - 2v_2 v_3^2, \\ & 2v_2^3 - 4v_2^2 v_3 + 2v_2 v_3^2 + 2v_3^3 + \beta, v_1 v_3^2 + v_2^3 - v_2^2 v_3, \\ & v_1^2 v_3 + v_1 v_2^2 + 2v_2^3 - 2v_2^2 v_3 - v_2 v_3^2, -v_1 v_2^3 - v_2^4 + 2v_2^3 v_3 + v_2^2 v_3^2] \end{aligned}$$

```
> solve(G)
```

$$\begin{aligned} & \{\beta = -2v_3^3, v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = v_3\}, \{\beta = 0, v_1 = v_1, v_2 = 0, v_3 = 0\}, \\ & \{\beta = 0, v_1 = v_2(\text{RootOf}(Z^3 + Z^2 - 2Z + 1))^2 + 2\text{RootOf}(Z^3 + Z^2 - 2Z + 1) - 1, \\ & v_2 = v_2, v_3 = \text{RootOf}(Z^3 + Z^2 - 2Z + 1)v_2\} \end{aligned}$$

- Что делать, если алгоритм вернул пустое множество?
- Что насчет векторов с компонентами-многочленами степени больше 0?
- Возможно ли решать полученную алгебраическую систему, определяющую компоненты сильно циклических векторов?
- Можно ли указанным методом находить все сильно циклические векторы?
- Другие подходы к построению сильно циклических векторов?

- С. А. Абрамов, А. А. Рябенко, Д. Е. Хмельнов «Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и усеченные ряды»
Журнал вычислительной математики и математической физики, 2019, том 59, №10, с. 1706–1717.
- R. C. Churchill and J. Kovacic. «Cyclic vectors».
Differential algebra and related topics, pages 191–218. 2002.
- S. A. Abramov, M. Petkovsek, A. A. Ryabenko «Resolving sequences of operators for linear ordinary differential and difference systems of arbitrary order»
Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016, Vol. 56, Issue. 5, P. 894–910.
- А. А. Панфёров, Е. А. Бордаченкова «Сильно циклические векторы»
Программирование, 2025, №2, с. 55–63