Об оценке сложности одного алгоритма приведения операторных матриц по строкам

Гулак М.А., Панфёров А.А.

Научная конференция «Ломоносовские чтения – 2026»
27 марта 2026 г.

Операторные матрицы

Системы линейных дифференциальных уравнений могут быть представлены в матричном виде, например:

$$\begin{cases} y_1'' + xy_2'' + (2x^2+1)y_3 = 0 \\ y_1''' + 2y_2'' + (x^2+x)y_3 + xy_1 = 0 \\ y_1' + xy_2' + y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$Ly = 0,$$

где $L = \begin{pmatrix} D^2 & xD^2 & 2x^2+1 \\ D^3+x & 2D^2 & x^2+x \\ D & xD & 1 \end{pmatrix} \in K[D]^{3\times 3},\ y = (y_1, \ldots, y_3)^T,$

$D = \dfrac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования.

Фронтальная матрица

$$L = \begin{pmatrix} D^2 & xD^2 & 2x^2+1 \\ D^3+x & 2D^2 & x^2+x \\ D & xD & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D^3 + \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x^2+1 \\ 1 & 0 & x^2+x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Фронтальная матрица

$$L = \begin{pmatrix} D^2 & xD^2 & 2x^2+1 \\ D^3+x & 2D^2 & x^2+x \\ D & xD & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D^3 + \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad x \quad 0} \\ 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1 \quad x \quad 0} \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x^2+1 \\ 1 & 0 & x^2+x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix} \text{ — \textit{фронтальная матрица}}$$

Приведённая по строкам форма

Определение

Операторная матрица находится в **приведённой по строкам форме**, если ненулевые строки её фронтальной матрицы линейно независимы над K.

Применение:

- проверка полноты ранга системы, нахождение ранга;
- проверка унимодулярности матрицы;
- использование в других алгоритмах.

Пример

Матрица L после приведения по строкам:

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & D & D - 2x^2 - 1 \\ D^3 + x & 2D^2 & x^2 + x \\ D & xD & 1 \end{pmatrix}$$

QuickRowReduction

Алгоритм QRR является адаптацией алгоритма *WeakPopovForm* для полиномиальных матриц.
T. Mulders, A.Ṡtorjohann, *On lattice reduction for polynomial matrices.* (2003).

Определение

Опорный индекс $I_j(L)$ j-й строки операторной матрицы L — наименьший номер столбца с наибольшим порядком оператора в этой строке.

Пример

$$L = \begin{pmatrix} D^2 & xD^2 & 2x^2+1 \\ D^2+x & 2D^3 & x^2+x \\ D & xD & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} I_1(L) &= 1 \\ I_2(L) &= 2 \\ I_3(L) &= 1 \end{aligned}$$

Алгоритм QRR

<u>Вход:</u> матрица дифференциальных операторов L с вектором порядков строк $\vec{\delta} = (\delta_1, ..., \delta_m)$.
<u>Выход:</u> приведённая по строкам матрица $L^{'}$ и матрица $U \in K[\partial]^{m \times m}$, такая, что $L' = UL$
<u>Инициализация:</u> $L^{'} := L,\ U^{'} = E_m,\ \vec{\delta}^{'} := \vec{\delta}$.

Пока есть строки с одинаковыми ненулевыми опорными индексами:

1. найти такие i, j, что $I_i(L') = I_j(L')$ и $\vec{\delta}_i' \geqslant \vec{\delta}_j'$;
2. заменить $L'_{i,*}$ на $\hat{L'}_{j,I_i(L')} L'_{i,*} - \hat{L'}_{i,I_i(L')} D^{\vec{\delta}_i' - \vec{\delta}_j'} L'_{j,*}$;
3. заменить $U'_{i,*}$ на $\hat{L'}_{j,I_i(L')} U'_{i,*} - \hat{L'}_{i,I_i(L')} D^{\vec{\delta}_i' - \vec{\delta}_j'} U'_{j,*}$;
4. обновить $I_i(L')$ и $\vec{\delta}'$.

Оценка сложности алгоритма

Предложение

Сложность алгоритма QRR по числу операций в K допускает оценку

$$O\left(m\ell\left(|\vec{\delta}| + \frac{m(m-1)}{2}\right)(2\ell + |\vec{\delta}|)\right),$$

где $|\vec{\delta}| = \sum_{i=1}^{m} \delta_i$.

Действия:

1. Поиск строк $\leqslant |\vec{\delta}| + \frac{m(m-1)}{2}$ раз
2. $L'_{i,*} \to \hat{L}'_{j,I_i(L')} L'_{i,*} - \hat{L}'_{i,I_i(L')} D^{\delta'_i - \delta'_j} L'_{j,*}$ $\leqslant m\ell^2$ операций
3. $U'_{i,*} \to \hat{L}'_{j,I_i(L')} U'_{i,*} - \hat{L}'_{i,I_i(L')} D^{\delta'_i - \delta'_j} U'_{j,*}$ $\leqslant m\ell(\ell + |\vec{\delta}|)$ операций

Оценка сложности алгоритма

Случай $K = \mathbb{Q}[x]$:

Предложение

Сложность алгоритма QRR по числу операций в $\mathbb{Q}$ допускает оценку

$$O\left(md^2\ell\left(|\vec{\delta}| + \frac{m(m-1)}{2}\right)(2\ell + |\vec{\delta}|)\right),$$

где d — максимальная степень многочленов из K, $|\vec{\delta}| = \sum_{i=1}^{m} \delta_i$.

Действия:

1. Поиск строк $\leqslant |\vec{\delta}| + \frac{m(m-1)}{2}$ раз
2. $L'_{i,*} \to \hat{L'}_{j,I_i(L')} L'_{i,*} - \hat{L'}_{i,I_i(L')} D^{\delta'_i - \delta'_j} L'_{j,*}$ $\leqslant m\ell^2 d^2$ операций
3. $U'_{i,*} \to \hat{L'}_{j,I_i(L')} U'_{i,*} - \hat{L'}_{i,I_i(L')} D^{\delta'_i - \delta'_j} U'_{j,*}$ $\leqslant m\ell d^2(\ell + |\vec{\delta}|)$ операций

Точность оценок

Утверждение

Полученные оценки являются точными.

Пусть
$$L = \begin{pmatrix} 2D^2 + 7D - 3 & 2D^2 + 5D - 2 \\ D^2 + 4D + \dfrac{1}{2} & D^2 + 3D + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
Тогда для L достигается максимальное количество операций.

В ходе алгоритма порядки элементов изменяются таким образом, что требуется 5 итераций цикла:
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Реализация алгоритма QRR

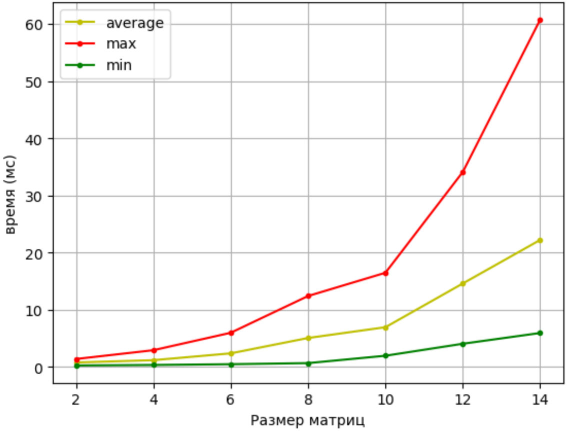
Алгоритм реализован в системе компьютерной алгебры *SageMath* в виде функции `quick_row_red(L)`.

Пример работы

```
sage: L
[   D^2 x*D^2 2*x^2+1]
[ D^3+x 2*D^2   x^2+x]
[     D   x*D       1]
sage: quick_row_red(L)
[  0   -D                                  -D+2*x^2+1]
[ -x    0 -x*D^3+(2*x^3+x+1)*D^2+8*x^2*D-x^2+3*x]
[  D x*D                                           1]
```

Результаты экспериментов

Замеры времени были выполнены для 100 сгенерированных матриц с фиксированным порядком ($\ell = 3$).



Вычисления проводились в SageMath (v.10.5), Intel(R) Core(TM) i7-9750H CPU @ 2.60GHz, 16 GB ОЗУ.