

От стохастических моделей к динамическим графам: моделирование финансовых рынков

Васильев Максим

МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики

Семинар
27 марта 2026

Введение: что такое портфель

Рассматривается рынок из N активов с ценами:

$$S_t = (S_t^1, \dots, S_t^N)$$

- ▶ S_t^i — цена i -го актива в момент времени t
- ▶ S_t — вектор цен всех активов на рынке

Портфель — это распределение капитала между активами.

Обозначим:

$$w_t \in \mathbb{R}^N$$

где w_t^i — доля капитала, вложенная в актив i в момент времени t .

Ограничение:

$$\sum_{i=1}^N w_t^i = 1$$

Постановка задачи максимизации прибыли

Цель — выбрать стратегию w_t , которая максимизирует доходность портфеля.

Общая постановка:

$$\max_{w_t} \mathbb{E}[R_T] - \lambda \cdot \text{Risk}(w_t)$$

где:

- ▶ R_T — итоговая доходность портфеля
- ▶ w_t — стратегия распределения капитала
- ▶ λ — коэффициент неприятия риска
- ▶ $\text{Risk}(w_t)$ — мера неопределенности результата (дисперсия, вариация и др.)

Введение: рынок как стохастическая система

Базовая модель цены актива:

Одно из первых предположений — лог-доходности описываются случайным процессом:

$$\log S_{t+1} - \log S_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

или в непрерывном времени:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Интерпретация:

- ▶ цена следует случайному блужданию с дрейфом
- ▶ краткосрочно поведение близко к шуму
- ▶ рынок моделируется как стохастический процесс

Проблема: такие модели не учитывают структуру рынка и взаимодействие активов.

Ранние методы: технический анализ

Идея: использование исторических цен для выявления локальных статистических закономерностей.

Пример: скользящее среднее

$$\bar{S}_t = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k S_{t-i}$$

Покупаем (или продаем), если $S_t > \bar{S}_t$

Моментум стратегия:

$$r_t^{(k)} = \frac{S_t}{S_{t-k}} - 1$$

Интерпретация:

- ▶ использование автокорреляции доходностей
- ▶ попытка экстракции краткосрочного тренда
- ▶ не задаётся явная модель динамики цены

Ограничение: нет явной модели риска и формальной оптимизации стратегии.

Ранние вероятностные идеи и диверсификация

Переход к вероятностному описанию рынка:

Доходности рассматриваются как многомерная случайная величина:

$$r \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbb{E}[r] = \mu, \quad \text{Cov}(r) = \Sigma$$

Ключевая идея диверсификации:

$$\text{Var}(w^T r) = w^T \Sigma w$$

Разложение риска:

- ▶ индивидуальный риск: дисперсии активов
- ▶ системный риск: ковариации между активами

Проблема: ковариационная структура считается фиксированной и заранее заданной.

Первая строгая оптимизационная модель: Марковиц

Формализация задачи выбора портфеля:

$$\max_w w^T \mu - \lambda w^T \Sigma w$$

при ограничении:

$$\mathbf{1}^T w = 1$$

Компоненты модели:

- ▶ μ — вектор ожидаемых доходностей
- ▶ Σ — матрица совместной изменчивости доходностей
- ▶ w — веса портфеля
- ▶ λ - коэффициент риска

Смысл:

- ▶ максимизация ожидаемой доходности
- ▶ штраф за портфельный риск

Ограничение: параметры μ и Σ считаются известными и стационарными.

Базовая стохастическая модель цены

Цена актива моделируется как геометрическое броуновское движение:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Почему такая модель используется:

- ▶ цены всегда положительны ($S_t > 0$)
- ▶ доходности эмпирически ближе к нормальным, чем сами цены
- ▶ изменения цены пропорциональны текущему уровню (эффект масштаба)
- ▶ рынок рассматривается как непрерывный процесс с шумом

Интерпретация:

- ▶ μ — средняя скорость роста (drift)
- ▶ σ — уровень неопределённости (волатильность)
- ▶ W_t — винеровский процесс (накопленный шум)

Оптимизация портфеля во времени (Merton problem)

Динамическая задача выбора портфеля:

Цель инвестора:

$$\max_{w_t} \mathbb{E}[U(R_T)]$$

где:

- ▶ R_t — капитал в момент времени t
- ▶ w_t — доли капитала, вложенные в активы
- ▶ $U(\cdot)$ — функция полезности, описывает предпочтения к риску

Динамика капитала:

$$dR_t = R_t \left(w_t^T \mu dt + w_t^T \sigma dW_t \right)$$

Интерпретация:

- ▶ доходность портфеля зависит от выбранных весов w_t
- ▶ присутствует случайный шум через dW_t
- ▶ задача является стохастическим управлением

Ограничения стохастических моделей

Проблемы классических моделей:

- ▶ параметры (μ, σ) предполагаются постоянными (стационарность)
- ▶ ковариационная структура Σ фиксирована и задаётся заранее
- ▶ отсутствует явное моделирование взаимодействий между активами
- ▶ модели плохо работают при смене рыночных режимов (кризисы, волатильные периоды)

Ключевой вывод:

Рынок = динамическая система с изменяющейся структурой зависимостей

Следствие: необходимо моделировать структуру зависимостей как изменяющуюся во времени

Рынок на малых временных масштабах

Классическая модель:

Цена S_t — непрерывный процесс (GBM)

Реальность:

Рынок — это поток заявок:

- ▶ заявки на продажу
- ▶ заявки на покупку
- ▶ отмены

Следствие:

- ▶ нет одной цены — есть стакан заявок
- ▶ сделки происходят дискретно
- ▶ важна вероятность исполнения ордера

Вывод: модель должна учитывать вероятность исполнения, а не только динамику цены

Avellaneda–Stoikov: лимитные заявки

Идея: учитывать вероятность исполнения ордера.

Ключевой элемент:

$$P(\text{execute}) = f(\text{distance to midprice})$$

Идея:

- ▶ ближе к средней цене → высокая вероятность исполнения
- ▶ дальше → выше прибыль, но ниже вероятность сделки

Компромисс:

profit vs execution probability

Результат: оптимальное размещение лимитных ордеров

Рынок как динамический граф

Наблюдение: активы взаимосвязаны.

Рынок можно представить как граф:

$$G_t = (V, E_t)$$

- ▶ V — активы
- ▶ E_t — зависимости между ними (корреляции, влияние)

Ключевая особенность:

- ▶ связи между активами меняются во времени
- ▶ структура рынка нестационарна

Следствие:

- ▶ граф G_t должен строиться динамически
- ▶ структура зависимостей становится объектом обучения

Объединение всех подходов

Рынок как динамическая система:

$$G_t = (V, E_t)$$

Временная динамика:

$$S_t \rightarrow r_t$$

Цель:

$$\max_{w_t} \mathbb{E}[R_T] - \lambda \cdot \text{Risk}(G_t)$$

Динамическая графовая модель позволяет учитывать структуру рынка при прогнозе вероятностей и принятии решений

Заключение и открытые проблемы

Основные выводы:

- ▶ классические модели предполагают стационарность
- ▶ реальные рынки — нестационарные и структурные
- ▶ GNN позволяет учитывать зависимости между активами

Открытые задачи:

- ▶ динамическое построение графа G_t
- ▶ устойчивость моделей во времени
- ▶ влияние способов построения графа и его топологии на результат

Практическая мотивация: разработка и исследование динамических GNN для решения таких задач.

Литература

- ▶ Markowitz H. (1952) *Portfolio Selection*
- ▶ Merton R. (1969) *Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty*
- ▶ Avellaneda M., Stoikov S. (2008) *High-Frequency Trading in a Limit Order Book*
- ▶ Li et al. (2021) *Stock Movement Prediction with Graph Neural Networks*
- ▶ A Survey on Graph Neural Networks for Time Series Forecasting (2023)
- ▶ A Systematic Literature Review of Spatio-Temporal GNNs (2024)