Перестановочный алгоритм приведения матриц к верхней блочно-треугольной форме

Андреева Елена Витальевна

ВМК МГУ, кафедра алгоритмических языков

Комбинаторная теория матриц изучает матрицы с точки зрения расположения элементов. Для этого используются такие операции, как перестановки строк и столбцов, транспонирование и блочное разбиение. Эти операции сохраняют комбинаторную структуру матрицы — меняется только расположение элементов, в то время как сами элементы остаются неизменными.

Применение: теория графов (матрицы смежности), комбинаторика, теория операторов, анализ структурных свойств систем.

Алгоритм, который использует только перестановки строк и перестановки столбцов, назовем **перестановочным**.

Требуется привести матрицу перестановками строк и перестановками столбцов   к верхней блочно-треугольной форме.

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{A_{11}} & \dots & \dots & \dots \\
\mathbf{0} & \mathbf{A_{22}} & \dots & \dots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A_{33}} & \dots. \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A_{kk}}
\end{pmatrix}
$$

где A_{ii} — квадратные блоки на диагонали, а все элементы ниже диагональных блоков равны нулю.

Пример:

$$
\begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & 0 \\
x_{21} & 0 & 0 \\
0 & x_{32} & x_{33}
\end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix}
\boxed{x_{33}} & x_{32} & 0 \\
0 & \boxed{x_{12}} & x_{11} \\
0 & 0 & \boxed{x_{21}}
\end{pmatrix}
$$

Алгоритм *Ard*:

1. $r := n$; $k := 1$; $p := r - k$.
2. Пытаемся найти в матрице M такие k строк с номерами $1 \le i_1 < \dots < i_k \le r$, что в матрице M', составленной из этих строк, есть p нулевых столбцов с номерами, не превосходящими r.
3. В случае неуспеха увеличиваем k на 1 и переходим к шагу 8.
4. Переставляем в M строки с номерами $i_k, \dots, i_1$ соответственно со строками с номерами $r, \dots, r - k + 1$.
5. Определяем j_0 — максимальный номер нулевого столбца в M', j_1 — минимальный номер ненулевого столбца в M': $j_0, j_1 \le r$.
6. Если $j_1 < j_0$, то переставляем в матрице M столбцы с номерами j_0 и j_1, повтор шага 5.
7. Если $j_1 > j_0$, то уменьшаем $r := r - k$, $k := 1$.
8. $p := r - k$. Если $p \ne 0$, переходим к шагу 2. Иначе — конец.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $r := 5$; $k := 1$; $p := r - k = 4$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $r := 5;\ k := 1;\ p := r - k = 4.$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $r := 5$; $k := 1$; $p := r - k = 4$.

(2) Находим строки с номерами $1 \le i_1 \le r$ ($r = 5$), что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 4$ нулевых элемента с номерами, не превосходящими $r = 5$. (*Успех, строка 1*)

$$\begin{pmatrix} \boxed{0 & 0 & 0 & 0 & x_{15}} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ \boxed{0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0} \end{pmatrix}$$

(1) $r := 5$; $k := 1$; $p := r - k = 4$.

(2) Находим строки с номерами $1 \le i_1 \le r$ ($r = 5$), что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 4$ нулевых элемента с номерами, не превосходящими $r = 5$. (*Успех, строка 1*)

(4) Переставляем строку с номером $i_1 = 1$ со строкой с номером $r = 5$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad x_{15}} \\ x_{21} \quad x_{22} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ x_{31} \quad x_{32} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad x_{42} \quad x_{43} \quad x_{44} \quad 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad x_{53} \quad x_{54} \quad 0} \end{pmatrix}$$

(1) $r := 5$; $k := 1$; $p := r - k = 4$.

(2) Находим строки с номерами $1 \le i_1 \le r$ ($r = 5$), что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 4$ нулевых элемента с номерами, не превосходящими $r = 5$. (*Успех, строка 1*)

(4) Переставляем строку с номером $i_1 = 1$ со строкой с номером $r = 5$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{0 \quad 0 \quad x_{53} \quad x_{54} \quad 0} \\ x_{21} \quad x_{22} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ x_{31} \quad x_{32} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad x_{42} \quad x_{43} \quad x_{44} \quad 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad x_{15}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $r := 5$; $k := 1$; $p := r - k = 4$.

(2) Находим строки с номером $1 \le i_1 \le r$ ($r = 5$), что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 4$ нулевых элемента с номерами, не превосходящими $r = 5$. (*Успех, строка 1*)

(4) Переставляем строку с номером $i_1 = 1$ со строкой с номером $r = 5$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{x_{15}} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 4$, $j_1 = 5$: $j_0, j_1 \le 5$.

(7) $j_1 > j_0 \Rightarrow r := r - k = 4$, $k := 1$.

(8) $p := r - k = 3 \Rightarrow p \ne 0$, перейдем к шагу 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $r := 5$; $k := 1$; $p := r - k = 4$.

(2) Находим строки с номером $1 \le i_1 \le r$ ($r = 5$), что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 4$ нулевых элемента с номерами, не превосходящими $r = 5$. (*Успех, строка 1*)

(4) Переставляем строку с номером $i_1 = 1$ со строкой с номером $r = 5$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 4$, $j_1 = 5$: $j_0, j_1 \le 5$.

(7) $j_1 > j_0 \Rightarrow r := r - k = 4$, $k := 1$.

(8) $p := r - k = 3 \Rightarrow p \ne 0$, перейдем к шагу 2.

(2) Находим строки с номерами $1 \le i_1 \le 4$, что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 3$ нулевых столбца с номерами, не превосходящими $r = 4$. (*Неудача*)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $r := 5$; $k := 1$; $p := r - k = 4$.

(2) Находим строки с номером $1 \le i_1 \le r$ ($r = 5$), что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 4$ нулевых элемента с номерами, не превосходящими $r = 5$. (*Успех, строка 1*)

(4) Переставляем строку с номером $i_1 = 1$ со строкой с номером $r = 5$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & x_{53} & x_{54} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & x_{15} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 4$, $j_1 = 5$: $j_0, j_1 \le 5$.

(7) $j_1 > j_0 \Rightarrow r := r - k = 4$, $k := 1$.

(8) $p := r - k = 3 \Rightarrow p \ne 0$, перейдем к шагу 2.

(2) Находим строки с номерами $1 \le i_1 \le 4$, что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 3$ нулевых столбца с номерами, не превосходящими $r = 4$. (*Неудача*)

(3) $k := k + 1$, переходим к шагу 8.

(8) $p := r - k = 2 \Rightarrow p \ne 0$, перейдем к шагу 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(2) Находим строки с номерами $1 \le i_1 < i_2 \le r$ ($r = 4$), что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 2$ нулевых столбца с номерами, не превосходящими $r = 4$. (*Успех, строка 2 и 3*)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(2) Находим строки с номерами $1 \le i_1 < i_2 \le r$ $(r = 4)$, что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 2$ нулевых столбца с номерами, не превосходящими $r = 4$. (*Успех, строка 2 и 3*)

(4) Переставляем строки с номерами i_2, i_1 соответственно со строками с номерами 4, 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(2) Находим строки с номерами $1 \le i_1 < i_2 \le r$ $(r = 4)$, что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 2$ нулевых столбца с номерами, не превосходящими $r = 4$. (*Успех, строка 2 и 3*)

(4) Переставляем строки с номерами i_2, i_1 соответственно со строками с номерами 4, 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 4$, $j_1 = 1$: $j_0, j_1 \le 4$.

(6) $j_1 < j_0$ => переставляем столбцы с номерами j_0 и j_1, переходим к шагу 5.

$$\begin{pmatrix} x_{54} & 0 & x_{53} & 0 & 0 \\ x_{44} & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{54} & 0 & x_{53} & 0 & 0 \\ x_{44} & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 3,\ j_1 = 2$: $j_0, j_1 \le 4$.

(6) $j_1 < j_0$ => переставляем столбцы с номерами j_0 и j_1, переходим к шагу 5.

$$\begin{pmatrix} x_{54} & 0 & x_{53} & 0 & 0 \\ x_{44} & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 3,\ j_1 = 2$: $j_0, j_1 \leq 4$.

(6) $j_1 < j_0$ => переставляем столбцы с номерами j_0 и j_1, переходим к шагу 5.

$$\begin{pmatrix} x_{54} & x_{53} & 0 & 0 & 0 \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{21} & 0 \\ 0 & 0 & x_{32} & x_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{54} & 0 & x_{53} & 0 & 0 \\ x_{44} & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 3,\ j_1 = 2 : j_0, j_1 \leq 4.$

(6) $j_1 < j_0$ => переставляем столбцы с номерами j_0 и j_1, переходим к шагу 5.

$$\begin{pmatrix} x_{54} & x_{53} & 0 & 0 & 0 \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{21} & 0 \\ 0 & 0 & x_{32} & x_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 2,\ j_1 = 3 : j_0, j_1 \leq 4.$

(7) $j_1 > j_0 \Rightarrow r := r - k = 2,\ k := 1.$

(8) $p := r - k = 1 \Rightarrow p \neq 0$, перейдем к шагу 2.

$$\begin{pmatrix} x_{54} & 0 & x_{53} & 0 & 0 \\ x_{44} & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 3,\ j_1 = 2$: $j_0, j_1 \le 4$.

(6) $j_1 < j_0$ => переставляем столбцы с номерами j_0 и j_1, переходим к шагу 5.

$$\begin{pmatrix} x_{54} & x_{53} & 0 & 0 & 0 \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{21} & 0 \\ 0 & 0 & x_{32} & x_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 2,\ j_1 = 3$: $j_0, j_1 \le 4$.

(7) $j_1 > j_0$=> $r := r - k = 2$, $k := 1$.

(8) $p := r - k = 1$ => $p \ne 0$, перейдем к шагу 2.

(2) Находим строки с номерами $1 \le i_1 \le r$ ($r = 2$), что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 1$ нулевой столбец с номерами, не превосходящими r = 2. (*Неудача*)

(3) $k := k + 1$, переходим к шагу 8.

(8) $p := r - k = 0$. Конец.

$$\begin{pmatrix} x_{54} & 0 & x_{53} & 0 & 0 \\ x_{44} & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 3,\ j_1 = 2$: $j_0, j_1 \le 4$.

(6) $j_1 < j_0$ => переставляем столбцы с номерами j_0 и j_1, переходим к шагу 5.

$$\begin{pmatrix} x_{54} & x_{53} & 0 & 0 & 0 \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{21} & 0 \\ 0 & 0 & x_{32} & x_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \end{pmatrix}$$

(5) $j_0 = 2,\ j_1 = 3$: $j_0, j_1 \le 4$.

(7) $j_1 > j_0$=> $r := r - k = 2$, $k := 1$.

(8) $p := r - k = 1$ => $p \ne 0$, перейдем к шагу 2.

(2) Находим строки с номерами $1 \le i_1 \le r$ ($r = 2$), что в матрице, составленной из этих строк, есть $p = 1$ нулевой столбец с номерами, не превосходящими r = 2. (*Неудача*)

(3) $k := k + 1$, переходим к шагу 8.

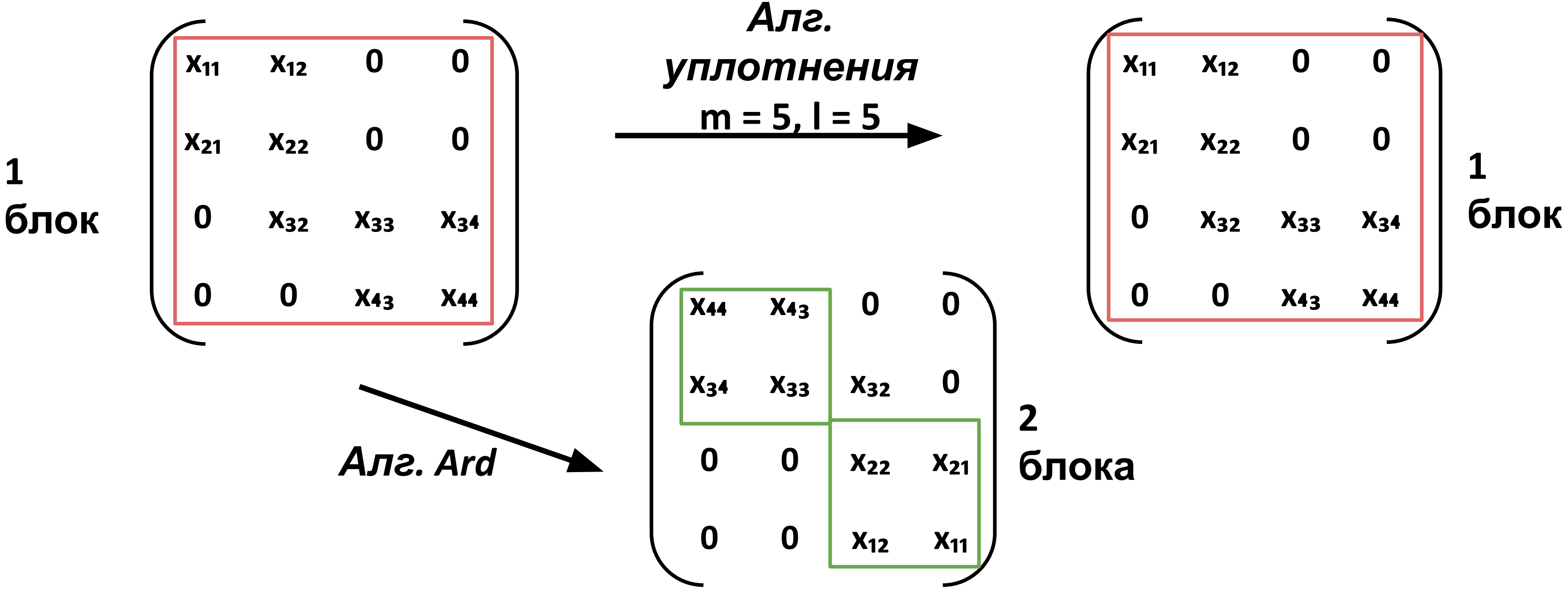
(8) $p := r - k = 0$. Конец.

Теорема 1. *Пусть M — матрица $n \times n$, допускающая приведение к верхнему блочно-треугольному виду, содержащему по крайней мере два блока. Тогда алгоритм Ard обеспечит приведение матрицы к верхнему блочно-треугольному виду с количеством блоков > 1.*

Следствие (критерий приводимости). *Пусть M — матрица размера $n \times n$. Тогда матрица M не может быть приведена к верхнему блочно-треугольному виду, содержащему более одного блоков, тогда и только тогда, когда алгоритм Ard, примененный к матрице M, завершает свою работу, находя ровно один блок.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & x_{42} & 0 & x_{44} \end{pmatrix}$$

Алгоритм *уплотнения* (Абрамов С. А., Рябенко А. А.) последовательно находит строки, где в первых $\boldsymbol{l}$ столбцах больше всего нулей, переставляет выбранную строку на позицию $\boldsymbol{m}$ и сдвигает нули влево внутри выбранного прямоугольника размера $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{l}$. После каждого шага область, в которой продолжается работа, уменьшается. Когда в результате нескольких шагов ширина $\boldsymbol{l}$ становится достаточно большой, внизу матрицы выделяется блочный треугольный блок.



Реализация

Система Sage — это открытая система компьютерной алгебры. Она позволяет выполнять алгебраические преобразования, решать уравнения, работать с матрицами и проводить другие математические вычисления.

Рабочий язык системы – Питон (Python).

```
sage: A = matrix([[1, 1, 0], [1, 0, 0], [0, 1, 1]])
sage: Ard(A)

INITIAL MATRIX:
[1 1 0]
[1 0 0]
[0 1 1]

TRANSFORMED MATRIX:
[1 1 0]
[0 1 1]
[0 0 1]

Row order after transformation: [3, 1, 2]
Column order after transformation: [3, 2, 1]
```

Перспективы исследований

- Доказательство того, что алгоритм Ard находит наилучшее возможное разложение, то есть разложение с максимальным количеством блоков
- Исследование вычислительной сложности

Список литературы

1. Абрамов С. А., Рябенко А. А. Конечные десятичные дроби как элементы невырожденных матриц // Программирование. — 2025. — № 2. — С. 83-90.
2. Бордаченкова Е. А., Зубарева В. Н., Панферов А. А. Расширяемое эссе о системе компьютерной алгебры Sage и редактор для создания расширяемых эссе // Программирование. — 2024. — № 2. — С. 13-21.
3. Brualdi R. A., Ryser H. J. Combinatorial Matrix Theory // Cambridge: Cambridge University Press. — 1991.